

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2026
CLASA a X- a

- **Alle Themen sind verpflichtend. Zehn Punkte werden von Amts wegen vergeben.**
- **Auf dem Prüfungsblatt werden die vollständigen Lösungen eingetragen.**
- **Die tatsächliche Arbeitszeit beträgt drei Stunden.**

Thema I (20 Punkte)

Zeigt, dass:

- a) $\log_2 5 + \log_5 2 > \log_2 5 \cdot \log_5 4$;
- b) $(\log_6 12 - \log_{12} 24)^{-1} \in (8; 10)$.

Thema II (20 Punkte)

Es sei n eine natürliche Zahl, $n \geq 3$ und $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ mit $[a_1] = [a_2] = \dots = [a_n] = 4$.

Zeigt, dass:

$$\log_{a_1} (9 a_2 - 20) + \log_{a_2} (9 a_3 - 20) + \dots + \log_{a_n} (9 a_1 - 20) \geq 2n.$$

Thema III (25 Punkte)

Bestimmt die Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:

$$f(f(n+1)) = f(f(n) + 1) = n + 4053, \text{ für jedwelcher } n \in \mathbb{N}.$$

Thema IV (25 Punkte)

Es seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, so dass $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ und $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Man soll zeigen, dass

$$|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3| = 4.$$